

# Fouriertransformation: DFT, FFT

Max Lindemann

19. Januar 2021

## INHALTSVERZEICHNIS

1	Motivation . . . . .	2
2	Diskretisierung . . . . .	2
2.1	Diskretisierung im Frequenzbereich . . . . .	2
2.2	Maximalfrequenz . . . . .	3
3	DTFT (Discrete Time Fourier Transformation) . . . . .	5
4	DFT (Discrete Fourier Transformation) . . . . .	6
5	FFT (Fast Fourier Transformation) . . . . .	9
6	Rechenzeitvergleich (DFT vs. FFT) . . . . .	10
7	Anhang . . . . .	11
7.1	Faltung mit Dirac . . . . .	11
7.2	Zusammenhang $e^x$ und $\delta(x)$ . . . . .	11
8	Quellen / Referenzen . . . . .	11

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1	Abtastung zeitkontinuierlicher Signale . . . . .	3
Abbildung 2	Transformationspaare . . . . .	3
Abbildung 3	Spektrum kontinuierlicher vs. abgetasteter Signale [1] . . . . .	3
Abbildung 4	Filterung $ S_a(f) $ mit $\text{rect}(fT)$ . . . . .	4
Abbildung 5	$ S_a(f) $ - überlappende Kopien [1] . . . . .	5
Abbildung 6	Diskretes periodisches Zeitsignal mit zugehörigem Spektrum [3] . . . . .	7
Abbildung 7	Signalfluss FFT (N=4) [2] . . . . .	10

## TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 1	Zusammenhang Abtastung u. Diskretisierung . . . . .	4
Tabelle 2	Überblick - Transformationen . . . . .	9
Tabelle 3	Vergleich Rechenaufwand . . . . .	10
Tabelle 4	Vergleich Gesamtaufwand . . . . .	10

## VORWORT

Grundlegende Kenntnisse der klassischen (kontinuierlichen) Fouriertransformation und Fourier-Reihe werden vorausgesetzt.

## 1 MOTIVATION

Die kontinuierliche Fouriertransformation erlaubt es uns, kontinuierliche Signale (Funktionen) aus dem Zeit- in den Frequenzbereich (Spektralbereich) abzubilden, und stellt damit eine wichtige Möglichkeit der Analyse von Signalen zur Verfügung.

Sie erlaubt es uns, unterschiedliche Informationen, die alle zeitgleich über den selben Übertragungskanal (z. B. Luft, Kabel) übertragen werden sollen, am Empfänger wieder von einander zu trennen, was im Zeitbereich nicht oder nicht so einfach möglich wäre.

Ohne diese Möglichkeit der Signalanalyse wäre unsere heutige Technik nicht denkbar. Da eben jene Technik aber in der Regel digital (diskret), also nicht kontinuierlich arbeitet, muss die mathematische Methode der kontinuierlichen Fouriertransformation etwas abgewandelt werden. Oder anders gesagt: Man muss mathematisch sinnvoll zeigen, dass (und vor allem wie) eine Fouriertransformation auch diskret funktioniert.

## 2 DISKRETISIERUNG

### 2.1 Diskretisierung im Frequenzbereich

Es ist zunächst sinnvoll sich erst einmal klar zu machen, welcher Zusammenhang zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen besteht, und welche Auswirkung eine Abtastung (Diskretisierung) im Zeitbereich auf das Spektrum eines Signals hat.

$$s_a(t) = s(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{s(nT)}_{\text{diskrete Werte!}} \cdot \delta(t - nT) \quad (1)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \delta(t - nT) \quad (2)$$

Gleichung (2) zeigt die mathematische Beschreibung einer Abtastung im Zeitbereich durch die Multiplikation mit einem Impulskamm (Folge von zeitl. verschobenen Dirac-Stößen). Dabei ist  $s_a(t)$  das abgetastete Signal,  $s(t)$  das zeitkontinuierliche, und  $s[n]$  das zeitdiskrete. Abbildung 1 veranschaulicht den Vorgang noch einmal. Das zugehörige Spektrum kann man, wie gewohnt, über die kontinuierlich Fouriertransformation herleiten (4). Abbildung 2 zeigt die dafür nötigen Transformationspaare.

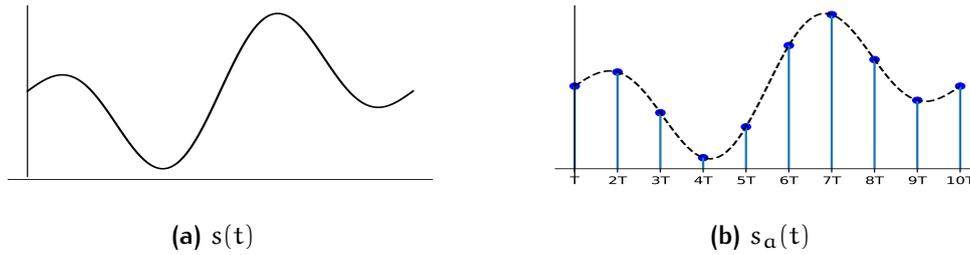


Abbildung 1: Abtastung zeitkontinuierlicher Signale

Multiplikation:  $s(t) \cdot g(t) \circ \bullet S(f) * G(f)$   
 Impulskamm:  $\sum \delta(t - nT) \circ \bullet \frac{1}{T} \sum \delta(f - \frac{n}{T})$

Abbildung 2: Transformationspaare

$$S_a(f) = S(f) * \left( \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right) \tag{3}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right) \tag{4}$$

Das Spektrum des abgetasteten Signals  $S_a(f)$  besteht offenbar aus unendlich vielen mit  $\frac{1}{T}$  gewichteten und um  $\frac{n}{T}$  verschobenen Kopien des Spektrums des ursprünglich zeitkontinuierlichen Signals  $s(t)$  (Abbildung 3).

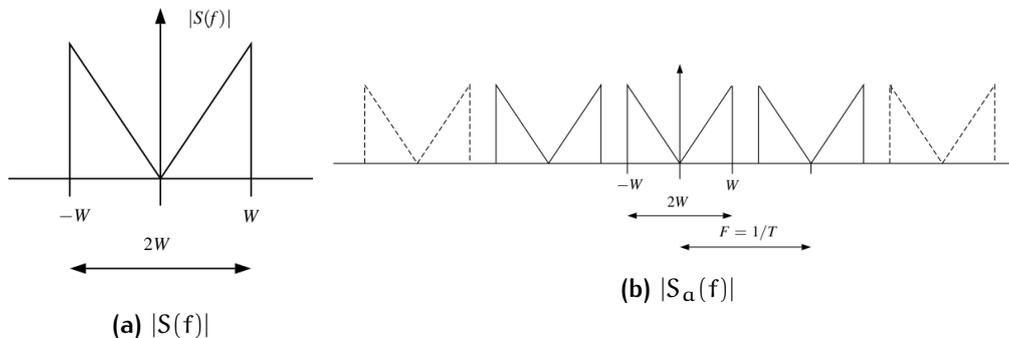


Abbildung 3: Spektrum kontinuierlicher vs. abgetasteter Signale [1]

Tabelle 1 verdeutlicht noch einmal den Zusammenhang zwischen kontinuierlichen, abgetasteten und diskreten Signalen.

### 2.2 Maximalfrequenz

Wenn man Signale abtastet (diskretisiert), sollte einem bewusst sein, dass man dadurch immer einen gewissen Informationsverlust in Kauf nimmt. Das ist aber erst einmal nicht weiter schlimm, da man diese verloren gegangenen Informationen unter einer gewissen Bedingung, durch z. B. Interpolation, wieder rekonstruieren kann.

zeitkontinuierlich	$x(t) \circ \bullet X(f)$
zeitkontinuierlich abgetastet	$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot \delta(t - nT)$ $\circ \bullet X_a(f) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$
zeitdiskret	$x[k] \circ \bullet X_a(f)$

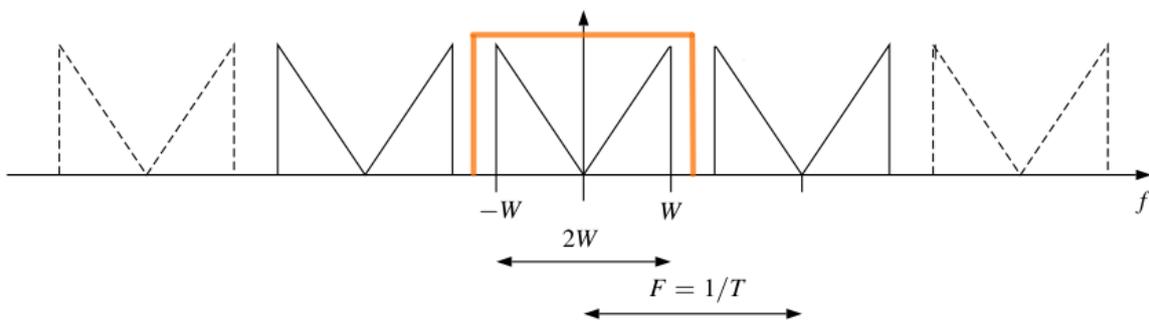
Tabelle 1: Zusammenhang Abtastung u. Diskretisierung

Aber wie sieht diese Bedingung aus?

Da durch die Abtastung unendliche viele Kopien des ursprünglichen Spektrums entstehen, muss man dieses durch geeignete Frequenzfilter von den Kopien trennen können. In Abbildung 4 und Gleichung (7) wird dies beispielhaft mit einer Rechteckfunktion (5) gezeigt, welche einem idealen Tiefpass entspricht.

Man beachte den Faktor  $\frac{1}{T}$  mit dem  $S(f)$  skaliert ist.

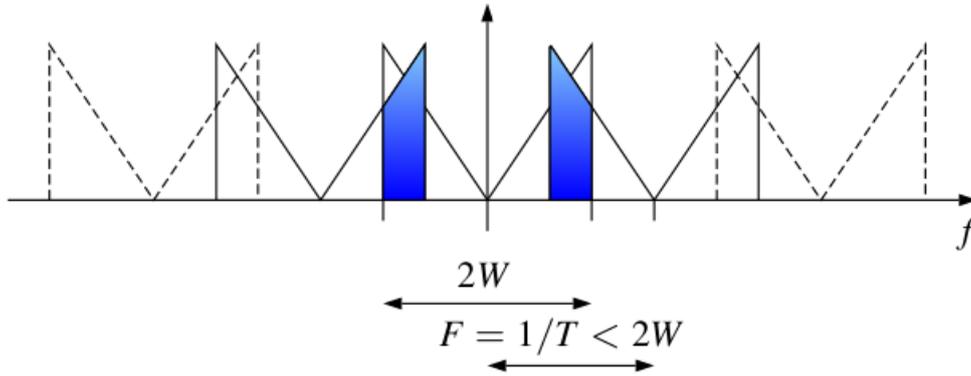
$$\text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < \frac{1}{2T} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |f| = \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{für } |f| > \frac{1}{2T} \end{cases} \quad (5)$$

Abbildung 4: Filterung  $|S_a(f)|$  mit  $\text{rect}(fT)$ 

$$\text{rect}(fT) \cdot S_a(f) = \text{rect}(fT) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{T} \cdot S(f) \quad (7)$$

Da der Abstand der Kopien  $\frac{1}{T}$  ( $:=$  Abtastrate) beträgt, ist es relativ offensichtlich, dass  $T$  nicht zu groß gewählt werden darf, da sich die Kopien sonst überlagern (Abbildung 5) und eine einwandfreie Trennung nicht mehr möglich ist. Die doppelte einseitige Bandbreite des Spektrums des abgetasteten Signals darf also nicht größer sein als der

Abbildung 5:  $|S_a(f)|$  - überlappende Kopien [1]

Abstand zwischen den Kopien (8). Oder anders gesagt: Die Zeit zwischen zwei Abtastungen muss kleiner sein als 1 durch die doppelte, maximal vorkommende Frequenz (8). Mann nennt diese Bedingung "Nyquist-Shannon-Abtasttheorem".

$$2W < \frac{1}{T} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow 2 f_{\max} < \frac{1}{T} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow T < \frac{1}{2 f_{\max}} \quad (10)$$

Die begrenzte zeitliche Auflösung (Genauigkeit) hat also auch eine begrenzte Auflösung im Spektralbereich zur Folge.

### 3 DTFT (DISCRETE TIME FOURIER TRANSFORMATION)

Wenn man das Spektrum im Zeitbereich abgetasteter Signale direkt über die kontinuierliche Fouriertransformation ausdrückt (14), erlaubt dies die Anwendung der Fourier-Reihe (15) auf diesen Ausdruck.

\*Eine Erläuterung zur Faltung mit zeitlich verschobenen Dirac-Stößen befindet sich im Anhang.

$$S_a(f) = \int_{\mathbb{R}} s_a(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \cdot \delta(t - nT) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (12)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \delta(t - nT) \cdot e^{-j2\pi ft} dt}_{\text{Faltung mit zeitl. verschobenem Dirac!}} \quad (13)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \cdot e^{-j2\pi nTf} \quad (14)$$

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n \cdot e^{j2\pi n t} \quad \circ \bullet \quad S[n] = F \int_T s(t) \cdot e^{-j2\pi n t} dt \quad (15)$$

Um die zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT) zu bestimmen, nutzt man die Fourier-Reihe also in 'umgekehrter Reihenfolge': Aus einem kontinuierlichen, periodischen Spektrum ( $e^{-j2\pi n T f} := \text{konst. für } T f \in \mathbb{Z}$ ) wird ein Zeitdiskretes Signal gewonnen (17).

$$s[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_a(f) \cdot e^{j2\pi n T f} df \quad (16)$$

$$\circ \bullet \quad S_a(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \cdot e^{-j2\pi n T f} \quad (17)$$

Die in der DTFT vorkommende, unendliche Summe kann allerdings nicht in einem digitalen Rechenwerk realisiert werden. Außerdem ist das Spektrum nach wie vor kontinuierlich und kann damit ebenfalls nicht einfach so digitalisiert werden.

## 4 DFT (DISCRETE FOURIER TRANSFORMATION)

Die Fourier-Reihe übersetzt ein periodisches und kontinuierliches Signal in ein diskretes Frequenzspektrum. Die DTFT dagegen übersetzt ein periodisches und kontinuierliches Frequenzspektrum in ein zeitdiskretes Signal. Was passiert, wenn man nun ein periodisches und gleichzeitig diskretes Signal oder Spektrum transformiert?

In Abschnitt 2 wurde bereits gezeigt, dass eine Faltung mit einem Impulskamm zu einer periodischen Fortsetzung führt. Man kann ein periodisches Signal also durch eine Grundperiode und eine Faltung darstellen (18).

$$x(t) = \underbrace{x_{ag}(t)}_{\text{Grundperiode}} * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nNT) \quad (18)$$

$$= \underbrace{\left( x_g(t) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) \right)}_{\text{abgetastet}} * \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nNT)}_{\text{periodisch}} \quad (19)$$

Dabei ist  $\frac{1}{T}$  die Abtastrate,  $NT$  die Periodendauer (Messdauer/Beobachtungszeit) und  $N$  die Anzahl an Abtastungen pro Periode. Das zugehörige Spektrum erhält man wie gewohnt über die kontinuierliche Fouriertransformation bzw. die entsprechenden Transformationspaare (20).

$$X(f) = \left( X_g(f) * \frac{1}{T} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right) \cdot \frac{1}{NT} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right) \quad (20)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_g\left(f - \frac{k}{T}\right)}_{\text{periodisch}} \cdot \underbrace{\frac{1}{NT} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right)}_{\text{abgetastet}} \quad (21)$$

$$= X_p(f) \cdot \frac{1}{NT} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right) \quad (22)$$

Wie man sehen kann, ist das Spektrum ebenfalls periodisch und diskret. Abbildung 6 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Der periodische Teil  $X_p(f)$  entspricht dem Spektrum des zeitdiskreten Signals  $x_p[k]$

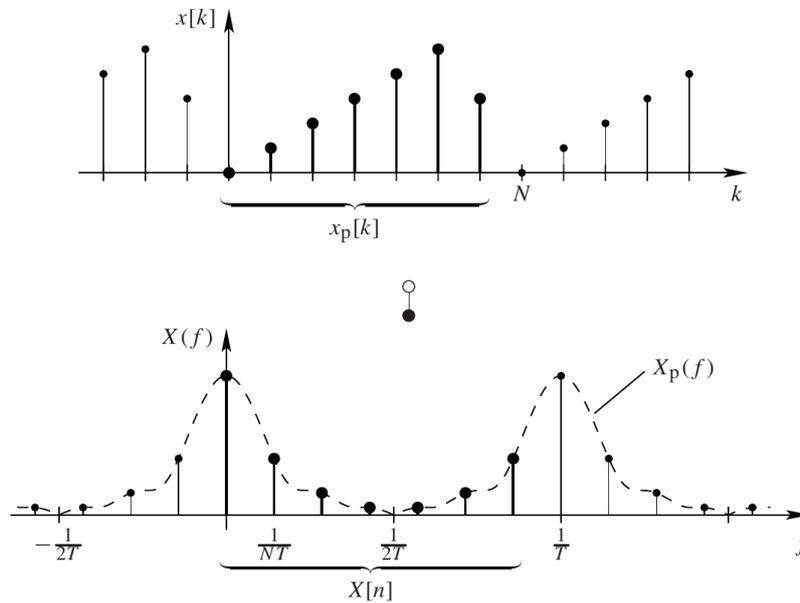


Abbildung 6: Diskretes periodisches Zeitsignal mit zugehörigem Spektrum [3]

(24), welches man über die DTFT gewinnen kann.

$$x[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_p[k - nN] = x_p[k] * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(k - nN) \quad (23)$$

$$x_p[k] = \begin{cases} x[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (24)$$

$$X_p(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_p[k] \cdot e^{-j2\pi k T f} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j2\pi k T f} \quad (25)$$

Unter Berücksichtigung der Diskretisierung im Frequenzbereich (26) erhält man die DFT (27).

$$X[n] = X_p\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \cdot e^{-j2\pi k T f} \Big|_{f=\frac{n}{NT}} \quad (26)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (27)$$

Auch hier gibt es wieder einen Koeffizienten  $\left(\frac{1}{NT}\right)$ , der den Zusammenhang zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Spektrum beschreibt (28) (Vgl. Abschnitt 2).

$$X(f) = \frac{1}{NT} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X[n] \cdot \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right) \quad (28)$$

Die inverse Beziehung der DFT erhält man durch Umstellen des diskreten Spektrums  $X[n]$  nach  $x[k]$  (32).

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (29)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} X[n] \cdot e^{j2\pi \frac{ln}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \cdot e^{j2\pi \frac{ln}{N}} \quad (30)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} X[n] \cdot e^{j2\pi \frac{ln}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \cdot e^{-j2\pi \frac{n(k-l)}{N}}}_{=N \cdot \delta[N(k-l)]=N|_{k=l}} \quad (31)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S[n] \cdot e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = x[k] \quad (32)$$

Gleichung (31) wird im Anhang (7.2) noch einmal erläutert.

Abschließend kann man sich noch die Frage stellen, ob eine Diskretisierung des Frequenzspektrums nicht, ähnlich wie im Zeitbereich, auch eine Verminderung der Genauigkeit (Informationsverlust) mit sich bringt.

$$\Delta t = T \quad (33)$$

$$\Delta f = \frac{1}{NT} \quad (34)$$

Den Gleichungen (33) und (34) lässt sich entnehmen, dass die Genauigkeit im Zeitbereich nur durch eine höhere Abtastrate gewährleistet werden kann, während im Frequenzbereich die Messdauer ( $NT$ ) von Bedeutung ist. Eine höhere Abtastrate verschlechtert sogar die Frequenzauflösung.

Tabelle 2 fasst die bisherigen Erkenntnisse noch einmal zusammen.

		Zeitbereich	
		kontinuierlich	diskret
Frequenzbereich	kontinuierlich	<p>Fourier-Transformation</p> $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$ $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$	<p>Zeitdiskrete Fourier-Transformation</p> $s[n] = F \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} u(f) \cdot e^{j2\pi nTf} df$ $S_a(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] \cdot e^{-j2\pi nTf}$
	diskret	<p>Fourier-Reihe</p> $s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n \cdot e^{j2\pi nTt}$ $S[n] = F \int_T s(t) \cdot e^{-j2\pi nTt} dt$	<p>Diskrete Fourier-Transformation</p> $s[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S[n] \cdot e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$ $S[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$

Tabelle 2: Überblick - Transformationen

## 5 FFT (FAST FOURIER TRANSFORMATION)

Der begrenzte Faktor der DFT ist der Rechenaufwand. Die FFT stellt eine besonders effiziente Implementierung der DFT dar. Um diese genauer verstehen zu können, lohnt es sich die DFT in Matrixschreibweise anzuschauen (37). Für eine kompaktere Darstellung wird dazu der komplexe Drehfaktor eingeführt (36)

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot W^{kn} \tag{35}$$

$$\text{komplexer Drehfaktor } W = e^{-j2\pi \frac{1}{N}} \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_F \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \tag{37}$$

Durch ausnutzen der Periodizität des komplexen Drehfaktors ( $W^{nN} = W^0, n \in \mathbb{Z}$ ) lässt sich F umformen (38) und daraus der in Abbildung 7 dargestellte Signalfluss ableiten. Ziel ist die Multiplikationen mit den komplexen Drehfaktoren in den rot markierten Vektoren nur einmal ausführen zu müssen. Dies ist jedoch nur möglich, solange die Anzahl von Messwerten N eine Potenz von 2 ist, da sonst die nötige Symmetrie nicht mehr vorhanden ist.

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \cdot W^0 & W^0 & W^0 \cdot W^0 \\ W^0 & W^1 \cdot W^0 & W^2 & W^1 \cdot W^2 \\ W^0 & W^2 \cdot W^0 & W^0 & W^2 \cdot W^0 \\ W^0 & W^3 \cdot W^0 & W^2 & W^3 \cdot W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \tag{38}$$

Dazu werden in der ersten Stufe zunächst die gewichteten Summen der Spalten 1 und 3 der Matrix F gebildet und anschließend in der zweiten Stufe die jetzt nur noch einfach auftretende Multiplikation ausgeführt.

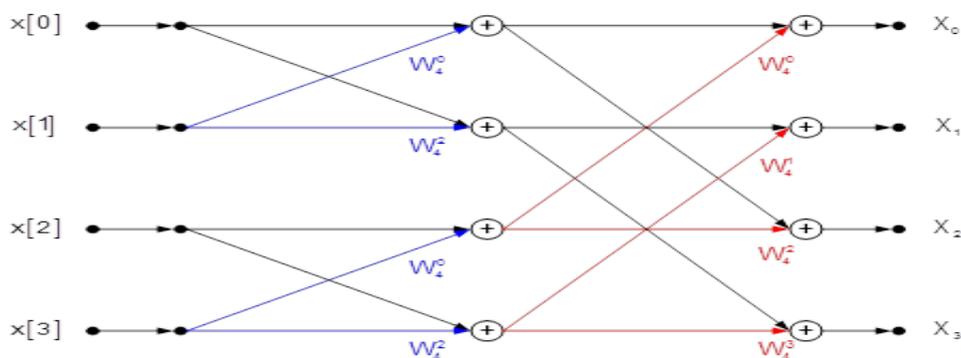


Abbildung 7: Signalfluss FFT (N=4) [2]

## 6 RECHENZEITVERGLEICH (DFT VS. FFT)

	DFT	FFT ( $\log_2(N)$ Stufen)
Multiplikationen	$N \cdot N$	$N$ (pro Stufe)
Additionen	$N \cdot (N - 1)$	$N$ (pro Stufe)
Gesamtaufwand	$N \cdot (2N - 1)$	$2N \cdot \log_2(N)$

Tabelle 3: Vergleich Rechenaufwand

Unter der Annahme, dass der Rechenaufwand einer komplexen Addition genau so groß wie der einer komplexen Multiplikation ist, lässt sich der in Tabelle 3 Vergleich des Gesamtrechenaufwandes aufstellen.

In Tabelle 4 wird dieser Vergleich mit ein paar greifbaren Zahlen veranschaulicht. Es zeigt sich, dass sich die Effizienz der FFT für längere Messreihen immer mehr von der der DFT abhebt.

	DFT	FFT	$\Delta = 1 - \frac{FFT}{DFT}$
$N = 4$	28	16	43%
$N = 8$	120	48	60%
$N = 16$	496	128	74%
$N = 32$	2016	320	84%
$N = 64$	8128	768	90,5%

Tabelle 4: Vergleich Gesamtaufwand

## 7 ANHANG

### 7.1 Faltung mit Dirac

Definition der Faltung:

$$f(t) * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(T-t) \cdot g(T) dT \quad (39)$$

Faltung mit Dirac:

$$\delta(t) * f(t) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\delta(T-t)}_{\delta(T-t)=1, \text{ wenn } T=t} \cdot f(t) dT = f(t) \quad (40)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \delta(t-T) \cdot f(t) dt = f(T) \quad (41)$$

Faltung mit zeitlich verschobenem Dirac:

$$\delta(t-t_0) * f(t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(T-(t-t_0)) \cdot f(T) dT = f(t-t_0) \quad (42)$$

### 7.2 Zusammenhang $e^x$ und $\delta(x)$

$$\sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{n(k-l)}{N}} = N \cdot \delta[N(k-l)] \quad (43)$$

$$1 \quad \circ \bullet \quad \delta(f) = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (44)$$

$$s(t) \cdot e^{j2\pi t f_0} \quad \circ \bullet \quad S(f-f_0) = \int_{\mathbb{R}} s(t) \cdot e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt \quad (45)$$

$$s(at) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{|a|} \cdot S\left(\frac{f}{a}\right) \quad (46)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{1}{N}(f-f_0)n} dn = N \cdot \delta(N(f-f_0)) \quad (47)$$

## 8 QUELLEN / REFERENZEN

### LITERATUR

- [1] D. Dahlhaus. "Skript Signalübertragung". In: (2019).
- [2] *Systemtheorie Online*. URL: <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesyto/quicklink/startseite.html>.
- [3] M. Bossert T. Frey. *Signal- und Systemtheorie*. 2009.